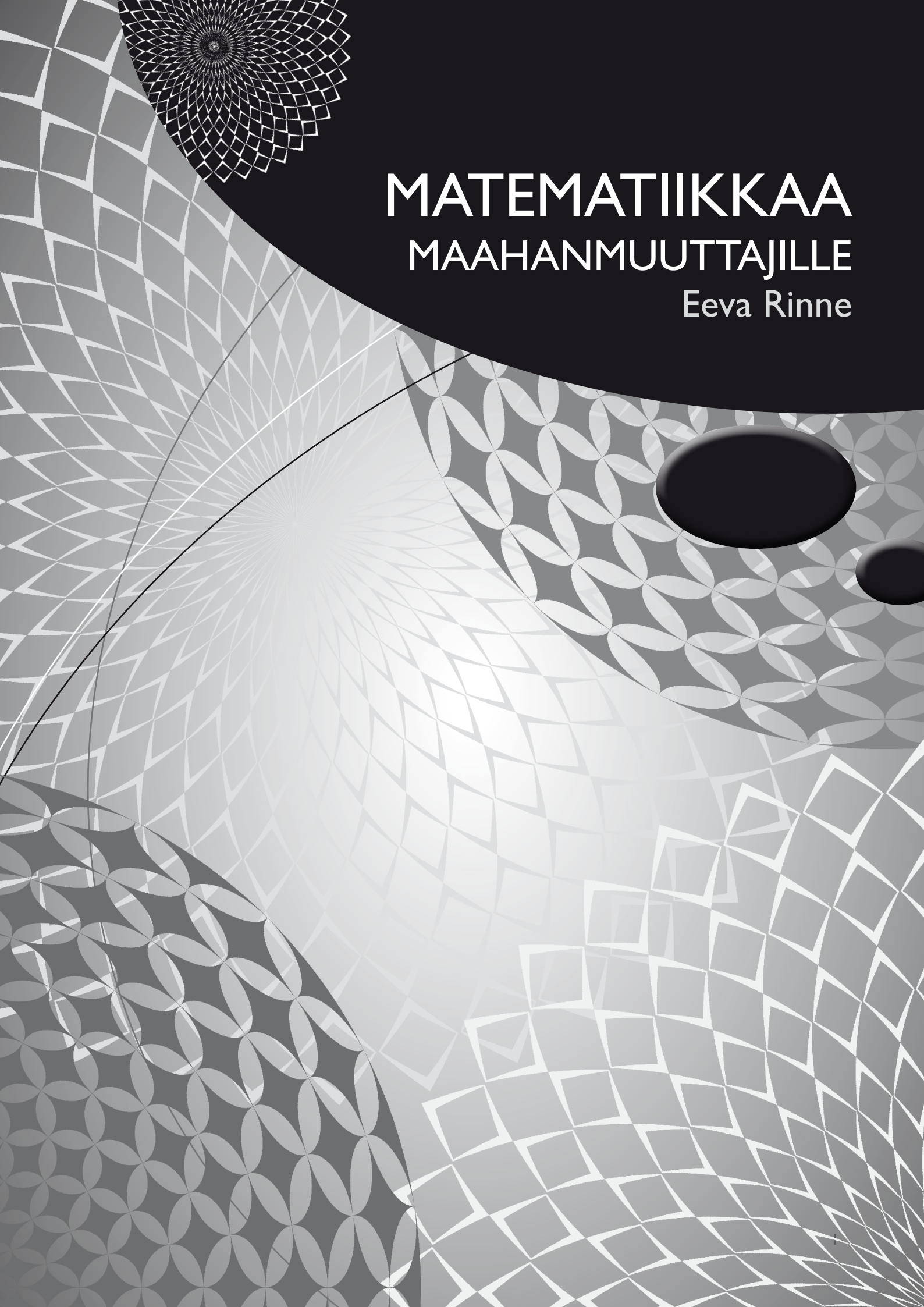
MATEMATIIKKAA
MAAHANMUUTTAJILLE

Eeva Rinne



Turun kristillisen opiston oppimateriaaleja -sarja

Tekijä: Eeva Rinne

Julkaisija: Turun kristillisen opiston säätiö, Lustokatu 7, 20380 Turku. www.tk-opisto.fi

Rahoitettu Opetushallituksen tuella.

ISBN 978-952-5803-20-4

Taitto: Ulriikka Lipasti

Paino: Kopio Niini Finland Oy, Turku 2010.

ESIPUHE

”Olisin osannut laskea, jos olisin tiennyt, mitä kysytään.” Tämä on usein kuultu lause maahanmuuttajien matematiikan opetustilanteissa.

Matematiikkaa maahanmuuttajille -oppimateriaali on tarkoitettu matemaattisen sanaston oppimisen tueksi tai kertaamiseen. Materiaalin kohderyhmänä ovat maahanmuuttajaopiskelijat, jotka ovat opiskelleet matematiikkaa omassa maassaan tai suomalaisessa oppilaitoksessa. Lähtökohtana on, että opiskelijat osaavat matematiikkaa, mutta heillä on vaikeuksia suomenkielisten termien kanssa.

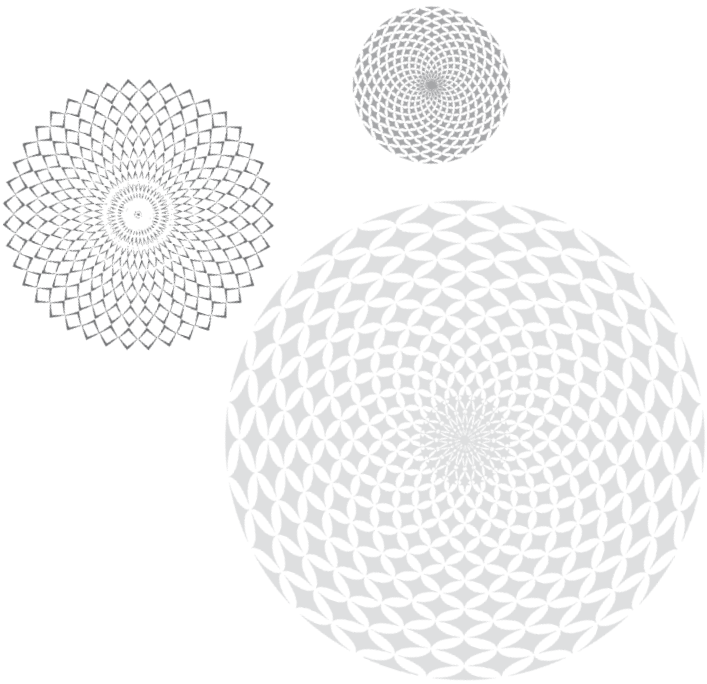
Materiaalin aihealueita ovat luvut, peruslaskutoimitukset, yksiköt, potenssioppi, neliöjuuri, prosenttilasku sekä polynomilaskenta ja yhtälöt. Sanaston laajuus on perusopetustasoa.

Aiheiden käsittelyssä esitetään lyhyesti teorian kertauksena laskuperiaate, keskeiset kaavat ja esimerkkejä. Näiden yhteydessä otetaan perussanasto esille. Esimerkeissä pyritään tuomaan esille suomalainen tapa kysyä ja ilmaista asioita. Harjoitustehtävissä on huomio kiinnitetty siihen, että opiskelija harjaantuu ymmärtämään, mitä kysytään varsinaisen aritmeettisen ratkaisemisen lisäksi. Opetustilanteen haasteellisempina lisätehtävinä voi käyttää opiskelijasta riippuen esimerkiksi perusopetuksen tai lukion oppikirjoja.

Kirjan jokaisesta luvusta on laadittu luettelo, joka pitää sisällään luvussa esiin tulleet sanat ja sanontatavat. Luettelot ovat kirjan loppuosassa. Niiden avulla opiskelija voi testata omaa sanastotuntemustaan. Myös harjoitustehtävien vastaukset ovat kirjan loppuosassa.

Turussa 29.11.2009

Eeva Rinne



SISÄLLYS

Esipuhe 3

Sisällys 5

I Lukuja ja lukujoukkoja 7

1. Perussanastoa 7
2. Kymmenjärjestelmä 9
3. Erilaisia lukuja 10
4. Lukujoukkoja 14
5. Laskutoimituksia 17

II Yksiköitä 19

1. Yksiköiden etuliitteitä 19
2. Pituuden yksiköt 19
3. Massan yksiköt 20
4. Vetomitat 20
5. Ajan yksiköt 20

III Lauseke ja lause 22

IV Potenssit 23

1. Potenssimerkintä 23
2. Samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä 23
3. Tulon ja osamäärän potenssi 24
4. Potenssin potenssi 25
5. Eksponenttina nolla 25
6. Negatiivinen eksponentti 25

V Neliöjuuri 27

1. Neliöjuuri 27
2. Muita juuria 27

VI Prosenttilasku 29

1. Prosentin käsite 29

2. Prosenttiarvon laskeminen 29
3. Prosenttiluvun laskeminen 30
4. Muutos- ja vertailuprosentti 31
5. Perusarvon laskeminen 32
6. Promille 33

VII Polynomit **34**

1. Peruskäsitteitä 34
2. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku 37
3. Polynomien kertolasku 38

VIII Yhtälö, epäyhtälö ja verranto **39**

1. Yhtälö 39
2. Yhtälön ratkaiseminen 40
3. Toisen asteen yhtälöt 42
4. Epäyhtälö 44
5. Verranto 45

Sanastoa **47**

Vastauksia **53**

I LUKUJA JA LUKUJOUKKOJA

1. Perussanastoa

laskutoimitus	verbi	substantiivi	merkki
yhteenlasku	laskea yhteen, lisätä	summa	+ plusmerkki
vähennyslasku	vähentää	erotus	– miinusmerkki
kertolasku	kertoa	tulo	· kertomerkki
jakolasku	jakaa	osamäärä	: jakomerkki $\frac{45}{12}$ ← jakoviiva

Esimerkki 1. Merkitse ja laske lukujen 18 ja 12 **summa**.

$18 + 12 = 30$ ← summa laskettuna

summa merkittynä

luetaan: 18 plus 12 on 30

= **yhtäsuuruusmerkki**
luetaan: on yhtä suuri kuin

18 ja 12 ovat **yhteenlaskettavat**

Esimerkki 2. Merkitse ja laske lukujen 45 ja 17 **erotus**.

$45 - 17 = 28$ ← erotus laskettuna

erotus merkittynä

luetaan: 45 miinus 17 on 28

45 on **vähenevä**
17 on **vähentäjä**

Esimerkki 3. Merkitse ja laske lukujen 12 ja 25 **tulo**.

$12 \cdot 25 = 300$ ← tulo laskettuna

tulo merkittynä

luetaan: 12 kertaa 25 on 300

12 ja 25 ovat **tulon tekijät**

12 on **kertoja**
25 on **kerrottava**

Esimerkki 4. Merkitse ja laske lukujen 56 ja 7 **osamäärä**.

56 : 7 = 8 tai $\frac{56}{7} = 8$ ← osamäärä laskettuna

↑

osamäärä merkittynä

56 on **jaettava**
7 on **jakaja**

luetaan: 56 jaettuna seitsemällä on 8

Esimerkki 5. Seuraavat ilmaukset tarkoittavat samaa yhteenlaskua:

Lisää lukuun 126 luku 34.
Laske yhteen luvut 126 ja 34.
Laske lukujen 126 ja 34 summa.

126 + 34 = 160

Esimerkki 6. Seuraavat ilmaukset tarkoittavat samaa vähennyslaskua:

Vähennä luvusta 137 luku 8.
Laske lukujen 137 ja 8 erotus.

137 – 8 = 129

Esimerkki 7. Seuraavat ilmaukset tarkoittavat samaa kertolaskua:

Kerro luvulla 12 luku 10.
Laske lukujen 12 ja 10 tulo.

12 · 10 = 120

Esimerkki 8. Seuraavat ilmaukset tarkoittavat samaa jakolaskua:

Jaa luku 125 luvulla 25.
Laske lukujen 125 ja 25 osamäärä.

125 : 25 = 5 tai $\mathbf{\frac{125}{25} = 5}$

Sulkumerkkejä

( ) kaarisulut
[ ] hakasulut
{ } aaltosulut

Laskujärjestys

1. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
2. Yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle
3. Laskujärjestystä voidaan muuttaa sulkumerkeillä. Sisimmät sulut poistetaan ensin. (kaarisulut → hakasulut → aaltosulut)

Esimerkki 9. Laske.

$31 - \{7 \cdot 6 : 2 + [13 - 2 \cdot (15 - 12) + 6] - 4\}$
$= 31 - \{7 \cdot 6 : 2 + [13 - 2 \cdot 3 + 6] - 4\}$
$= 31 - \{7 \cdot 6 : 2 + [13 - 6 + 6] - 4\}$
$= 31 - \{7 \cdot 6 : 2 + 13 - 4\}$
$= 31 - \{21 + 13 - 4\}$
$= 31 - 30 = 1$

Harjoituksia:

1. Merkitse ja laske.

a) Lukujen 8 ja 3 tuloon lisätään luku 9.
b) Luvusta 25 vähennetään lukujen 36 ja 9 osamäärä.
c) Lukujen 9 ja 11 summa kerrotaan luvulla 2.
d) Lukujen 9 ja 7 summa jaetaan niiden erotuksella.

2. Merkitse ja laske

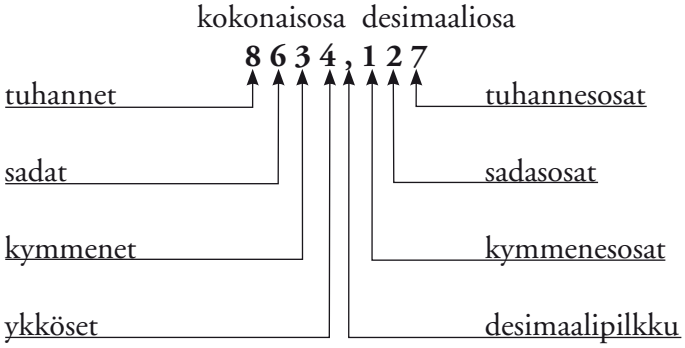
a) lukujen 20 ja 5 osamäärän ja tulon summa
b) lukujen 25 ja 5 erotuksen ja summan tulo
c) lukujen 9 ja 5 summan ja erotuksen erotus
d) lukujen 22 ja 8 summan ja lukujen 14 ja 7 osamäärän tulo.

2. Kymmenjärjestelmä

Lukujen nimien perusmuotoja (lukuyksikköjä)

10	kymmenen
100	sata
1000	tuhat
10 000	kymmenentuhatta
100 000	satatuhatta

Esimerkki 1. Desimaaliluku



$$\mathbf{8634{,}127} = \mathbf{8} \cdot 1000 + \mathbf{6} \cdot 100 + \mathbf{3} \cdot 10 + \mathbf{4} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot \frac{1}{10} + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{100} + \mathbf{7} \cdot \frac{1}{1000}$$

Luku luetaan:
kahdeksantuhatta kuusisataakolmekymmentäneljä kokonaista
satakaksikymmentäseitsemän tuhannesosaa
(kahdeksantuhatta kuusisataakolmekymmentäneljä pilkku satakaksikymmentäseitsemän)

Suuria lukuyksiköitä

miljoona	1 000 000	10^6 (kymmenen potenssiin kuusi)
miljardi	1 000 000 000	10^9
biljoona	1 000 000 000 000	10^{12}
triljoona	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}

3. Erilaisia lukuja

Kokonaisluku

Esimerkki 1.

5	viisi
23	kaksikymmentäkolme
345	kolmesataaneljäkymmentäviisi
67 542	kuusikymmentäseitsemäntuhatta viisisataaneljäkymmentäkaksi

Desimaaliluku

Suomessa desimaaliluvussa käytetään **desimaalipilkkua**.
Laskimessa desimaaliluvussa on **desimaalipiste**.

Esimerkki 2.

13,4	kolmetoista kokonaista neljä kymmenesosaa (kolmetoista pilkku neljä)
2 536,75	kaksituhatta viisisataakolmekymmentäkuusi kokonaista seitsemänkymmentäviisi sadasosaa (kaksituhatta viisisataakolmekymmentäkuusi pilkku seitsemänkymmentäviisi)

Desimaaliluku voi olla myös **päättymätön desimaaliluku**. Luku on katkaistava eli **pyöristettävä**. (*pyöristää*) Jos ensimmäinen poisjäävä numero on 5 tai sitä suurempi, on viimeinen mukaan tuleva numero korotettava yhdellä. Kun luku pyöristetään, saadaan luvun **likiarvo**.

Päättymätön desimaaliluku voi olla **jaksollinen** desimaaliluku tai **jaksoton** desimaaliluku. (*jakso*)

Esimerkki 3.

Luku 12,4545… on päättymätön jaksollinen desimaaliluku. Jakso on 45. Jakso kirjoitetaan kaksi kertaa. Luku 1,4142… on päättymätön jaksoton desimaaliluku.

Esimerkki 4.

Ilmoita luvut kolmen desimaalin (tuhannesosien) **tarkkuudella**.(*tarkkuus*)

123,4343… ≈ 123,434
123,4545… ≈ 123,455
567,12789… ≈ 567,128

Muutkin luvut kuin päättymättömät desimaaliluvut voidaan pyöristää jonkin yksikön tarkkuudelle.

Esimerkki 5.

Ilmoita luku 12 763,58

a) kymmenesosien (yhden desimaalin) tarkkuudella Vastaus: 12 763,6
b) kymmenien tarkkuudella Vastaus: 12 760
c) tuhansien tarkkuudella. Vastaus: 13 000

Murtoluku

$$\frac{5}{7} \quad \begin{matrix} \longleftarrow \text{osoittaja} \\ \longleftarrow \text{nimittäjä} \end{matrix}$$

luetaan **viisi seitsemäsosaa**

Murtoluvun muuntaminen sekaluvuksi (*muuntaa*)

Jos murtoluvun osoittaja on suurempi kuin nimittäjä, murtoluku voidaan muuntaa **sekaluvuksi** jakamalla.

Kun 18 jaetaan luvulla 7, saadaan 2 kokonaista ja **jakojäännös** on 4.

$$\frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$$

murtoluku **sekaluku**

$$2\frac{4}{7}$$

kokonaisosa murto-osa

luetaan: **kaksi kokonaista neljä seitsemäsosaa**

Sekaluvun muuntaminen murtoluvuksi

Kokonaisosalla 3 kerrotaan nimittäjä 7 ja tuloon lisätään osoittaja 2. ($3 \cdot 7 + 2 = 23$)

$$3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$$

Murtoluvun muuntaminen desimaaliluvuksi

Murtolukumerkintä voidaan käsittää jakolaskuna. Suoritetaan jakolasku.

$$\frac{5}{8} = 0{,}625$$

Desimaaliluvun muuntaminen murtoluvuksi tai sekaluvuksi

$0{,}7 = \frac{7}{10}$ seitsemän **kymmenesosaa**

$0{,}37 = \frac{37}{100}$ kolmekymmentäseitsemän **sadasosaa**

$2{,}061 = 2\,\frac{61}{1000}$ kaksi kokonaista kuusikymmentäyksi **tuhannesosaa**

Samannimisillä murtoluvuilla on sama nimittäjä. (*samannimiset murtoluvut*)
Erinimisillä murtoluvuilla on eri nimittäjä. (*erinimiset murtoluvut*)

Esimerkki 6.

Murtoluvut $\frac{1}{13}$, $\frac{5}{13}$ ja $\frac{11}{13}$ ovat keskenään samannimisiä murtolukuja.

Niiden nimittäjänä on sama luku 13.

Laventaminen (*laventaa*)

Osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla.

Esimerkki 7. Lavenna murtoluvut samannimisiksi.

$^{6)}\frac{1}{2}$ $\quad$ $^{4)}\frac{2}{3}$ $\quad$ $^{3)}\frac{1}{4}$

laventaja merkitään vasempaan yläkulmaan

$\frac{6}{12}$ $\quad$ $\frac{8}{12}$ $\quad$ $\frac{3}{12}$

Supistaminen (*supistaa*)

Osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla.

Esimerkki 8. Supista yksinkertaisimpaan muotoon.

a) $\frac{7}{21}^{(7} = \frac{1}{3}$

supistaja merkitään oikeaan yläkulmaan

b) $\frac{27}{63}^{(9} = \frac{3}{7}$

Harjoituksia

3. Kirjoita kokonais- tai desimaalilukuna

a) neljäkymmentätuhatta neljäsataakahdeksan
b) miljoona kolmesataakaksitoistatuhatta kuusisataa
c) seitsemänkymmentäkahdeksan kokonaista kaksisataaneljä kymmenestuhannesosaa.

4. Mitä lukuyksikköä numero 8 edustaa seuraavissa luvuissa?

a) 800 000
b) 3,41805
c) 1780
d) 118

5. Kirjoita luku 17 357,0763

a) tuhansien tarkkuudella
b) kymmenesosien tarkkuudella
c) tuhannesosien tarkkuudella
d) kymmenien tarkkuudella.

6. Kirjoita, miten luetaan seuraavat luvut.

a) $\frac{8}{9}$ $\quad$ b) $3\frac{4}{5}$ $\quad$ c) $7\frac{21}{56}$

7. Muunna sekaluvuksi tai kokonaisluvuksi.

a) $\frac{11}{9}$ b) $\frac{121}{11}$ c) $\frac{122}{11}$

8. Muunna murtoluvuksi.

a) $3\frac{3}{5}$ b) 0,37 c) 2,0671

9. Muunna desimaaliluvuksi.

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{11}{9}$ c) $\frac{21}{4}$

10. Lavenna samannimisiksi.

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{7}{30}$

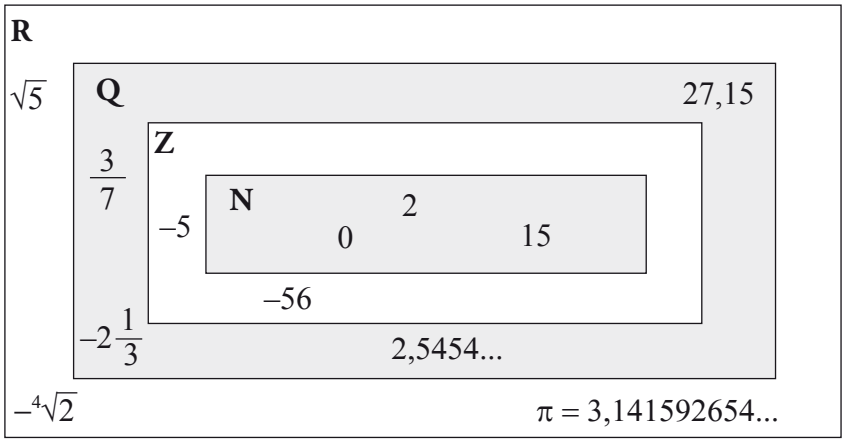
11. Supista luvut yksinkertaisimpaan muotoonsa.

a) $\frac{3}{27}$ b) $\frac{12}{54}$ c) $\frac{11}{242}$

4. Lukujoukkoja

Luonnolliset luvut	**N** =	{0, 1, 2, 3, 4, …}
Kokonaisluvut	**Z** =	{…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}
Positiiviset kokonaisluvut	**Z+** =	{1, 2, 3, …}
Negatiiviset kokonaisluvut	**Z–** =	{–1, –2, –3, …}
Rationaaliluvut	**Q** =	luvut, jotka voidaan esittää murtolukumuodossa
Reaaliluvut	**R** =	rationaaliluvut ja irrationaaliluvut

Irrationaaliluku on luku, jonka likiarvo on useimmiten päättymätön jaksoton desimaaliluku, esimerkiksi $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π, …



Erisuuruusmerkit

merkki	luetaan	esimerkki
$>$	on suurempi kuin	$8 > 6$
$<$	on pienempi kuin	$5 < 6$
$\geq$	on suurempi tai yhtä suuri kuin	$3 \geq 1$
$\leq$	on pienempi tai yhtä suuri kuin	$7 \leq 7$
$\neq$	on erisuuri kuin	$8 \neq 9$

Luvut, joilla on sama **etumerkki**, ovat keskenään samanmerkkisiä lukuja. (*samanmerkkiset luvut*)

Esimerkki 1. Kaikki positiiviset luvut ovat keskenään samanmerkkisiä lukuja.

Esimerkki 2. Kaikki negatiiviset luvut ovat keskenään samanmerkkisiä lukuja.

Luvut, joilla on eri etumerkki, ovat keskenään **erimerkkisiä** lukuja. (*erimerkkiset luvut*)

Esimerkki 3. Luvut +12 ja –5 ovat erimerkkisiä lukuja.

Esimerkki 4. Luvut –3,24 ja 17,5 ovat erimerkkisiä lukuja.

Vastaluku

Luvun vastaluku saadaan **vaihtamalla sen etumerkki**. Luvun vastaluku **merkitään** lisäämällä luvun eteen **miinusmerkki**. Luvun ja sen vastaluvun summa on nolla.

Esimerkki 5.

luku	vastaluku merkittynä	vastaluku laskettuna
8	–8	–8
+0,7	–(+0,7)	–0,7
–3,5	–(–3,5)	3,5

Käänteisluku

Käänteisluku saadaan vaihtamalla osoittaja ja nimittäjä keskenään. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on yksi.

Esimerkki 6.

luku	käänteisluku
$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
$-2\frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$	$-\frac{3}{8}$
5	$\frac{1}{5}$

Itseisarvo

Luvun **itseisarvo** on luvun etäisyys nollasta. Luvun itseisarvo on aina ei-negatiivinen.

Esimerkki 7.

$|+8| = 8$ $\quad$ $|-11{,}2| = 11{,}2$

Harjoituksia

12. Miten luetaan seuraavat merkinnät?

a) $2 < 4$ $\quad$ b) $5 \neq 7$ $\quad$ c) $12 \geq -50$ $\quad$ d) $5 > 3{,}5$

13. Merkitse ja laske lukujen vastaluvut.

a) -12 $\quad$ b) $+12{,}5$

14. Merkitse ja laske luvun -15 vastaluvun vastaluku.

15. Mitkä ovat lukujen käänteisluvut?

a) $\frac{3}{7}$ $\quad$ b) $\frac{11}{9}$ $\quad$ c) -12

16. Merkitse ja laske lukujen itseisarvot.

a) $-25{,}1$ $\quad$ b) $+11$

17. Merkitse ja laske.

Lukujen -18 ja $+12$ summan itseisarvosta vähennetään samojen lukujen erotus.

18. Merkitse ja laske.

Luvun $-\frac{2}{5}$ käänteisluvun vastaluvusta vähennetään luvun -2 itseisarvo.

5. Laskutoimituksia

Erimerkkisten lukujen laskutoimitukset

Yhteen- ja vähennyslasku

Sievennetään aluksi ylimääräiset sulkumerkit pois.
Jos yhteenlaskettavat ovat samanmerkkiset, lasketaan niiden itseisarvojen summa. Etumerkiksi tulee yhteinen etumerkki.
Jos yhteenlaskettavat ovat erimerkkiset, lasketaan niiden itseisarvojen erotus. Etumerkiksi tulee itseisarvoltaan suuremman etumerkki.
(**sieventää:** suorittaa laskutoimitukset, saattaa yksinkertaisimpaan muotoon, laskea; substantiivi: **sieventäminen**)

Kertolasku

Ennen kertomista päätellään tulon etumerkki.
Kahden samanmerkkisen luvun tulo on **positiivinen**.
Kahden erimerkkisen luvun tulo on **negatiivinen**.

Jakolasku

Ennen jakamista päätellään osamäärän etumerkki.
Jos jaettava ja jakaja ovat samanmerkkisiä, osamäärä on **positiivinen**.
Jos jaettava ja jakaja ovat erimerkkisiä, osamäärä on **negatiivinen**.

Esimerkki 1.

a) $(-11) - (+21) = -11 - 21 = -32$
b) $(-17) - (-8) = -17 + 8 = -9$

Esimerkki 2.

a) $(-5) \cdot (+8) = -40$ **b)** $(-13) \cdot (-9) = 117$
c) $15 : (-5) = -3$ **d)** $(-18) : (-3) = 6$

Murtoluvut

Yhteen- ja vähennyslasku

Erinimiset murtoluvut lavennetaan ensin samannimisiksi. Osoittajat lasketaan yhteen tai vähennetään. Nimittäjäksi tulee yhteinen nimittäjä.

Kertolasku

Osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään. Ennen kertomista supistetaan, jos se on mahdollista.

Jakolasku

Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla. Ennen kertomista supistetaan, jos se on mahdollista.

Esimerkki 3.

a) $-2\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = -\frac{{}^{3)}9}{4} + \frac{{}^{4)}2}{3} = -\frac{27}{12} + \frac{8}{12} = -\frac{19}{12} = -1\frac{7}{12}$

b) $-2\frac{1}{4} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 6$

c) $\frac{9}{4} : \frac{8}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{27}{32}$

Harjoituksia

19. a) $-(-8) - (+11)$ b) $-(+0{,}8) + (-1{,}27)$ c) $-11{,}2 + 9{,}3 - (-13 + 15{,}2)$

20. a) $-\frac{2}{5} + 3\frac{1}{3} - 4\frac{3}{5}$ b) $-1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{9} : \frac{14}{3} : \left(-\frac{2}{49}\right)$

21. Merkitse ja laske.

Lukujen –21 ja +13 summasta vähennetään luku –18.

22. Merkitse ja laske.

Lukujen –15 ja –12 erotuksesta vähennetään lukujen –1 ja –4 tulo.

23. Merkitse ja laske.

Lukujen $\frac{2}{5}$ ja $-\frac{6}{10}$ osamäärään lisätään luku –5.

II YKSIKÖITÄ

1. Yksiköiden etuliitteitä

luku	kymmenen potenssi	etuliite	lyhenne
biljoona	10^{12}	**tera**	**T**
miljardi	10^{9}	**giga**	**G**
miljoona	10^{6}	**mega**	**M**
tuhat	10^{3}	**kilo**	**k**
sata	10^{2}	**hehto**	**h**
kymmenen	10^{1}	**deka**	**da**
ykkönen	$\mathbf{10^{0}}$		
kymmenesosa	10^{-1}	**desi**	**d**
sadasosa	10^{-2}	**sentti**	**c**
tuhannesosa	10^{-3}	**milli**	**m**
miljoonasosa	10^{-6}	**mikro**	**µ**
miljardisosa	10^{-9}	**nano**	**n**
biljoonasosa	10^{-12}	**piko**	**p**

2. Pituuden yksiköt

yksikkö	tunnus	yksikkö metreinä
kilometri	km	1 km = 10^{3} m = 1000 m
hehtometri	hm	1 hm = 10^{2} m = 100 m
dekametri	dam	1 dam = 10^{1} m = 10 m
metri	m	
desimetri	dm	1 dm = 10^{-1} m = 0,1 m
senttimetri	cm	1 cm = 10^{-2} m = 0,01 m
millimetri	mm	1 mm = 10^{-3} m = 0,001 m

Kahden **vierekkäisen** yksikön välinen **suhdeluku** on 10.

3. Massan yksiköt

yksikkö	tunnus	yksikkö grammoina
kilogramma	kg	1 kg = 1000 g
hehtogramma	hg	1 hg = 100 g
dekagramma	dag	1 dag = 10 g
gramma	g	
desigramma	dg	1 dg = 0,1 g
senttigramma	cg	1 cg = 0,01 g
milligramma	mg	1 mg = 0,001 g

Kahden **vierekkäisen** yksikön välinen **suhdeluku** on 10.
Käytössä on myös yksikkö **tonni**. Yksi tonni (1 t) on 1000 kg $=10^6$ g = 1 Mg (megagramma).

Huom. Arkikielessä usein käytetään massasta nimitystä paino. Täsmällisessä kielessä Maan kappaleeseen kohdistamaa vetovoimaa sanotaan kappaleen painoksi (gravitaatio).

4. Vetomitat

yksikkö	tunnus	yksikkö litroina
kilolitra	kl	1 kl = 1000 l
hehtolitra	hl	1 hl = 100 l
dekalitra	dal	1 dal = 10 l
litra	l	
desilitra	dl	1 dl = 0,1 l
senttilitra	cl	1 cl = 0,01 l
millilitra	ml	1 ml = 0,001 l

Kahden **vierekkäisen** yksikön välinen **suhdeluku** on 10.

5. Ajan yksiköt

yksikkö	tunnus	
vuosi	a	= 12 kk
kuukausi	kk	
vuorokausi	d	= 24 h
tunti	h	= 60 min
minuutti	min	= 60 s
sekunti	s	

Vuodessa 1 a on 365 vuorokautta (d) ja karkausvuodessa on 366 vuorokautta.
Joskus matematiikassa käytetään myös lukuarvoa 1 a = 360 d.
Kuukaudessa oletetaan olevan 30 vuorokautta, jos ei tiedetä, mikä kuukausi on kyseessä.

Harjoituksia

1. Muunna suluissa olevaan yksikköön.

a) 3,5 km (m) b) 12,14 m (cm) c) 5,3 dm (mm)

2. Muunna suluissa olevaan yksikköön.

a) 27 mm (dm) b) 148 cm (m) c) 1245 m (km)

3. Muunna suluissa olevaan yksikköön.

a) 14,9 kg (dag) b) 1045 g (kg) c) 0,045 g (mg)

4. Muunna suluissa olevaan yksikköön.

a) 14,9 l (hl) b) 1045 ml (l) c) 0,45 l (dl)

5. Muunna

a) 3 min 8 s sekunneiksi b) 2 h 30 min tunneiksi c) 7200 s tunneiksi.

6. Puolitoista kilogrammaa juustoa maksaa 16,20 €.

a) Kuinka paljon maksaa 450 g samaa juustoa?

b) Kuinka paljon saa tätä juustoa 27 eurolla?

7. Kalle matkusti bussilla. Bussi lähti klo 14.20 ja saapui perille klo 15.13.
Kuinka kauan bussimatka kesti?

8. Kesämökille on matkaa 84 km. Matkasta 5/6 on asfalttitietä ja 1/7 on hiekkatietä.
Loppuosa matkasta kuljetaan meritse. Kuinka pitkä on meritien osuus?

III LAUSEKE JA LAUSE

Lauseke

Kirjaimin tai numeroin merkittyä laskutoimitusta sanotaan matematiikassa **lausekkeeksi**.

Esimerkki 1.

$a + b$ $\quad$ $3x - 5y$ $\quad$ $a \cdot b$ $\quad$ $5a : b$

Lauseke on merkitty laskutoimitus.
Muuttuja on lausekkeessa esiintyvä kirjain.
Vakio on lausekkeessa esiintyvä luku.
Lausekkeen arvo saadaan, kun muuttujan paikalle **sijoitetaan** luku ja suoritetaan laskutoimitukset.

Esimerkki 2. Olkoon lauseke $2a + 3b$.

a) Lausekkeessa a ja b ovat muuttujia ja 2 ja 3 ovat vakioita.

b) Laske lausekkeen $2a + 3b$ **arvo**, kun $a = -1{,}3$ ja $b = 4{,}1$.

$2a + 3b = 2 \cdot (-1{,}3) + 3 \cdot 4{,}1 = -2{,}6 + 12{,}3 = 9{,}7$

Lausekkeen arvo on **9,7**.

Lause

Matematiikassa (logiikassa) **lause** on ilmaisu, jolla on jokin totuusarvo.

Esimerkki 3.

$2 = 5$ Lause on **epätosi**.
$8 > 3 + 2$ Lause on **tosi**.

Lause voi olla myös **avoin** lause, jossa muuttujan arvo vaikuttaa lauseen totuusarvoon.

Esimerkki 4. $x + 3 = 11$ Lause on muuttujan x arvolla 8 tosi, muuten se on epätosi.

Harjoituksia

1. Laske lausekkeen $(s + 2t)(s - 3t)$ arvo, kun $s = -0{,}2$ ja $t = 0{,}5$.

2. Mitkä seuraavista ovat lausekkeita, mitkä lauseita?

$2x - 11 = 14$ $\quad$ $2x - 11$ $\quad$ $3 = 4$ $\quad$ $a + 5b$

IV POTENSSIT

1. Potenssimerkintä

$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$	tekijöitä **a** on m kappaletta m on **positiivinen** kokonaisluku
$a^1 = a$	
a^m	a on **kantaluku** m on **eksponentti**
luetaan: a potenssiin m	

Kantaluku a **korotetaan** potenssiin m.
verbi: ***korottaa*** *potenssiin* substantiivi: *potenssiin* ***korottaminen***

Esimerkki 1. a) $3^4 = 81$ luetaan: kolme potenssiin neljä on 81,
kolme neljänteen on 81

b) $5^6 = 15\,625$ luetaan: viisi potenssiin kuusi on 15 625,
viisi kuudenteen on 15 625

Luvun toista potenssia sanotaan myös luvun **neliöksi**.
Luvun kolmatta potenssia sanotaan myös luvun **kuutioksi**.

Esimerkki 2. a) $5^2 = 25$ luetaan: viisi potenssiin kaksi on 25,
viisi toiseen on 25,
luvun viisi neliö on 25,
viiden neliö on 25

b) $4^3 = 64$ luetaan: neljä potenssiin kolme on 64,
neljä kolmanteen on 64,
luvun neljä kuutio on 64,
neljän kuutio on 64

2. Samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä

Jos potensseilla on **sama kantaluku**, ne ovat **samankantaisia potensseja**.(*samankantaiset potenssit*)

Esimerkki 1. Potenssit 2^3 ja 2^{15} ovat samankantaisia potensseja, koska niillä on sama kantaluku.

Samankantaisten potenssien tulo:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Kantaluku pysyy samana. Eksponentit lasketaan yhteen.

Esimerkki 2. a) $a^6 \cdot a \cdot a^{11} = a^{6+1+11} = a^{18}$

b) $a^4b^7 \cdot ab^2 = a^5b^9$

Samankantaisten potenssien osamäärä:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

Kantaluku pysyy samana. Eksponentit vähennetään.

Esimerkki 3. a) $\frac{a^1}{a^6} = a^{1-6} = a^{-5} \quad (a \neq 0)$

b) $\frac{a^{11} \cdot a^7}{a^6} = a^{11+7-6} = a^{12} \qquad (a \neq 0)$

3. Tulon ja osamäärän potenssi

Tulon potenssi:

$$(ab)^n = a^nb^n$$

Jokainen tulon tekijä korotetaan erikseen potenssiin.

Esimerkki 1. $(2ab)^3 = 2^3a^3b^3 = 8a^3b^3$

Osamäärän potenssi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

Jaettava ja jakaja korotetaan erikseen potenssiin.
Potenssit a^n ja b^n ovat **samankorkuisia potensseja**, koska niiden **eksponentit** ovat yhtä suuret.
(*samankorkuiset potenssit*)

Esimerkki 2. a) $\left(\frac{8}{a}\right)^2 = \frac{8^2}{a^2} = \frac{64}{a^2} \qquad (a \neq 0)$

b) $\left(\frac{5b}{a}\right)^3 = \frac{5^3b^3}{a^3} = \frac{125b^3}{a^3} \qquad (a \neq 0)$

c) $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1\ 000\ 000$

Tulon kaavaa on käytetty oikealta vasemmalle.

4. Potenssin potenssi

Potenssin potenssi:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Eksponentit kerrotaan keskenään, kantaluku pysyy samana.

Esimerkki 1. a) $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$

b) $2^{3^2} = 2^9 = 512$ (ei ole potenssin potenssi)

Esimerkki 2. $\left(\frac{3b^4}{2^2a^5}\right)^3 = \frac{3^3b^{12}}{2^6a^{15}} = \frac{27b^{12}}{64a^{15}}$ $(a \neq 0)$

5. Eksponenttina nolla

Lasketaan lauseke $\frac{a^m}{a^m}$ kahdella eri tavalla.

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ $(a \neq 0)$ eksponentit vähennetään

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ $(a \neq 0)$ jaetaan

joten on oltava $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

Esimerkki 1. a) $8a^2 \cdot 125^0 \cdot a^4 = 8a^2 \cdot 1 \cdot a^4 = 8a^6$

b) $(200^5ab^9)^0 - 500^0 \cdot 2 = 1 - 1 \cdot 2 = -1$

6. Negatiivinen eksponentti

Esimerkki 1. Lasketaan esimerkki $\frac{3^7}{3^9}$ kahdella eri tavalla.

$\frac{3^7}{3^9} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{3\cdot3} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)$ supistamalla

$\frac{3^7}{3^9} = 3^{7-9} = 3^{-2}$ potenssikaavan mukaan

joten on oltava $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Luvun negatiivinen eksponentti muutetaan positiiviseksi ja samalla luku itse vaihdetaan käänteisluvukseen.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

vastaavasti $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \qquad (b \neq 0,\ a \neq 0)$$

Esimerkki 2. **a)** $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

Harjoituksia

1. Kirjoita potenssimerkintänä.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $a \cdot a \cdot a$ c) kantaluku on 3 ja eksponentti on 7

d) kantaluku on –3 ja eksponentti on 2

2. Laske potenssin arvo.

a) $0{,}2^3$ b) 15^2 c) 10^6 d) $(-3)^2$ e) $(-3)^3$ f) -3^2

3. Merkitse ja laske.

a) luvun –5 neliö b) luvun –5 kuutio

4. Sievennä. (**sieventää**: suorittaa laskutoimitukset, saattaa yksinkertaisimpaan muotoon, laskea)

a) $2x^3 \cdot 3x \cdot (-8x)$ b) $\frac{3x^5y^4}{9x^3y}$ c) $(2a^3)^4 \cdot (-3a)$ d) $\frac{10x^5y^4}{5xy^3}$

5. Laske.

a) $7^{12345} : 7^{12344} \cdot 7$ b) $\left(\frac{-1}{2}\right)^4 \cdot 4^2 \cdot (-5)^2$ c) 2^{3^2} d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \frac{1}{2}$

V NELIÖJUURI

1. Neliöjuuri

Määritelmä

Luvun $a \geq 0$ neliöjuuri $\sqrt{a}$ on luku, joka toteuttaa ehdot

1. $\sqrt{a} \geq 0$
2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Luvun a neliöjuuri on ei-negatiivinen luku, jonka neliö on a.

Esimerkki 1.

juurimerkki $\longrightarrow$ $\sqrt{25} = 5$ $\longleftarrow$ juuren arvo

$\uparrow$

juurrettava

luetaan: neliöjuuri kaksikymmentäviisi on viisi (neliöjuuri kahdestakymmenestäviidestä on viisi)

Esimerkki 2. Laske seuraavien **juurilausekkeiden** arvot.

a) $2\sqrt{25} - \sqrt{81} = 2 \cdot 5 - 9 = 1$

b) $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

Esimerkki 3. Sievennä.

a) $\sqrt{a^2b^6} = ab^3$

b) $\sqrt{\dfrac{9a^6b^8}{4}} = \dfrac{3}{2}a^3b^4$

2. Muita juuria

$\sqrt[3]{27} = 3$ luetaan: kuutiojuuri kaksikymmentäseitsemän on kolme

$\sqrt[4]{16} = 2$ luetaan: neljäs juuri kuusitoista on kaksi

$\sqrt[5]{1024} = 4$ luetaan: viides juuri tuhatkaksikymmentäneljä on neljä

Harjoituksia

1. Miten luetaan seuraavat merkinnät?

a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{225} = 15$ c) $\sqrt[3]{125} = 5$ d) $\sqrt[4]{81} = 3$

2. Sievennä.

a) $\sqrt{25a^{10}b^4}$ b) $3\sqrt{16} - 2\sqrt{9}$ c) $\sqrt{\frac{12-3}{50:2}}$ d) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{121}$

VI PROSENTTILASKU

1. Prosentin käsite

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ % on prosenttimerkki
prosentti on sadasosa

2. Prosenttiarvon laskeminen, p % luvusta

Peruskysymys:

Kuinka paljon on p % luvusta a?
luetaan: Kuinka paljon on p prosenttia luvusta a?

$\mathbf{b} = \frac{p}{100} \cdot a$

p = prosenttiluku
a = perusarvo
b = prosenttiarvo

$\frac{p}{100}$ on **prosenttikerroin**

Esimerkki 1. a) Kuinka paljon on 30 prosenttia 2,7 kilogrammasta?

$\frac{30}{100} \cdot 2{,}7 \text{ kg} = 0{,}81 \text{ kg}$

tai $0{,}30 \cdot 2{,}7 \text{ kg} = 0{,}81 \text{ kg}$

Vastaus: Se on 0,81 kg.

b) Linnean kuukausipalkka on 2450 €. Hän saa 2,3 % palkankorotusta.
Kuinka suuri on korotus? Mikä on uusi, korotettu palkka?

korotus: $\frac{2{,}3}{100} \cdot 2450 \text{ €} = 56{,}35 \text{ €}$ tai $0{,}023 \cdot 2450 \text{ €} = 56{,}35 \text{ €}$

korotettu palkka: 2450 € + 56,35 € = 2506,35 €

Vastaus: Korotus on 56,35 € ja uusi, korotettu palkka on 2506,35 €.

Sanontoja: *korottaa hintaa, nostaa hintaa, korottaa palkkaa, nostaa palkkaa, hinta nousee, palkka nousee*

Esimerkki 2.

Kuinka monta grammaa kaulakorussa on kultaa, kun korun kulta**pitoisuus** on 85 %?
Koru painaa 15,40 grammaa. (*pitoisuus*)

$0{,}85 \cdot 15{,}40\ \text{g} = 13{,}09\ \text{g}$

Vastaus: Kultaa on 13,09 g.

Esimerkki 3. 78 euron hintaisista kengistä annettiin alennusta 15 %. Kuinka suuri on alennus? Mikä on alennettu hinta?

alennus: $0{,}15 \cdot 78\ € = 11{,}70\ €$

alennettu hinta: $78\ € - 11{,}70\ € = 66{,}30\ €$

Vastaus: Alennus on 11,70 € ja alennettu hinta on 66,30 €.

Sanontoja: *antaa alennusta, alentaa hintaa, laskea hintaa, hinta laskee*

3. Prosenttiluvun laskeminen – Kuinka monta prosenttia?

Kuinka monta prosenttia luku b on luvu**sta** a?

$\frac{b}{a} \cdot 100\ \%$	b = prosenttiarvo a = perusarvo

Esimerkki 1. Kuinka monta prosenttia 20 euroa on 50 euro**sta**?

$$\frac{20\ €}{50\ €} \cdot 100\ \% = 40\ \% \qquad \text{tai} \qquad \frac{20\ €}{50\ €} = 0{,}40 = 40\ \%$$

Vastaus: 40 %.

Esimerkki 2. 150 euron takista annettiin alennusta 35 euroa. Kuinka suuri on alennusprosentti?

alennus euroina: 35 €

alkuperäinen eli alentamaton hinta: 150 €

alennus prosentteina $\frac{35\ €}{150\ €} \cdot 100\ \% \approx 23\ \%$

Vastaus: Se on 23 %.

4. Muutos- ja vertailuprosentti

Muutosprosentti

Esimerkki 1. Kengät maksoivat ennen alennusmyyntiä 75,50 €. Kenkien alennettu hinta on 60,00 €. Kuinka monta prosenttia kenkien hintaa on alennettu?

alennus euroina: 75,50 € – 60,00 € = 15,50 €

alkuperäinen eli alentamaton hinta: 75,50 €

Lasketaan, montako prosenttia alennus on alkuperäisestä hinnasta.

alennus prosentteina $\frac{15{,}50\ €}{75{,}50\ €} \cdot 100\ \% \approx 21\ \%$

Vastaus: Hintaa on alennettu 21 %.

Muutosprosentti: $\frac{\text{muutos}}{\text{alkuperäinen arvo}} \cdot 100\ \%$

(alkuperäinen arvo tai aikaisempi arvo)

Vertailuprosentti

Esimerkki 2. Kallen kuukausipalkka oli 2100 € ja Villen kuukausipalkka oli 3200 €.

a) Kuinka monta prosenttia Kallen palkka oli piene**mpi kuin** Villen palkka?
b) Kuinka monta prosenttia Villen palkka oli suure**mpi kuin** Kallen palkka?

Lasketaan ensin **erotus:** 3200 € – 2100 € = 1100 €

vertailu: $\frac{\text{erotus}}{\text{kuin...}} \cdot 100\ \%$

a) $\frac{1100}{3200} \cdot 100\ \% \approx 34\ \%$

Vastaus: Kallen palkka oli 34 % pienempi kuin Villen palkka.

b) $\frac{1100}{2100} \cdot 100\ \% \approx 52\ \%$

Vastaus: Villen palkka oli 52 % suurempi kuin Kallen palkka.

Vertailuprosentti: $\frac{\text{erotus}}{\text{vertailuarvo}} \cdot 100\ \%$

Prosenttiyksikkö

Kun prosenttilukuja verrataan toisiinsa, muutos ilmoitetaan usein niiden välisenä erotuksena eli

prosenttiyksikköinä.
Esimerkki 3. Pankkitilin korko laski 2,6 prosentista 1,2 prosenttiin.

a) Kuinka monta **prosenttiyksikköä** korko laski?
b) Kuinka monta prosenttia korko laski?

a) erotus: 2,6 % – 1,2 % = 1,4 %

Vastaus: Tilin korko laski 1,4 prosenttiyksikköä.

b) $\frac{\text{muutos}}{\text{alkuperäinen arvo}} \cdot 100\ \% = \frac{1{,}4}{2{,}6} \cdot 100\ \% \approx 54\ \%$

Vastaus: Korko aleni 54 %.

5. Perusarvon laskeminen

Mistä luvusta b on p %?

$a = \frac{b}{p} \cdot 100$

a = perusarvo
b = prosenttiarvo
p = prosenttiluku

Esimerkki 1. Mistä määrästä 50 kg on 25 %?

Perusarvo prosentteina on 100 %.

$\frac{50\text{ kg}}{25} \cdot 100 = 200\text{ kg}$ tai $\frac{50\text{ kg}}{0{,}25} = 200\text{ kg}$

Vastaus: Määrä on 200 kg.

Esimerkki 2.

Asiakas saa ostamistaan vaelluskengistä alennusta 43,68 €, joka on 28 % alkuperäisestä hinnasta. Mikä oli kenkien alkuperäinen hinta?

alennus euroina: 43,68 €

alennus prosentteina: 28 %

alkuperäinen hinta: $\frac{43{,}68\text{ €}}{28} \cdot 100 = 156\text{ €}$

Vastaus: Kenkien alkuperäinen hinta oli 156 €.

6. Promille

Promille on tuhannesosa $1\ ‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Esimerkki 1.

Emilian sormuksen massa on 10 grammaa. Kuinka paljon sormuksessa on kultaa, kun sen kultapitoisuus on 750 ‰?

$\frac{750}{1000} \cdot 10\ \text{g} = 7{,}5\ \text{g}$

Vastaus: Sormuksessa on 7,5 g kultaa.

Harjoituksia

1. Puseron hinta oli kaupassa 80 €. Siitä annettiin alennusta 20 %.

a) Kuinka suuri on alennus? b) Mikä on alennettu hinta?

2. Syystakin alkuperäinen hinta oli 210 €. Hinta laski 40 %.

a) Kuinka suuri oli alennus? b) Kuinka paljon takista joutui maksamaan?

3. Bensiinin 1,20 euron litrahintaan tulee 10 %:n korotus. Kuinka suuri on korotus? Mikä on korotettu hinta?

4. Sähkön kilowattituntihinta on 5 senttiä. Hintaa nostetaan 20 %.

a) Kuinka suuri on korotus? b) Mikä on uusi hinta?

5. Kauppias antaa 83,60 €:n hintaisista kengistä alennusta 20,90 €. Kuinka monta prosenttia on alennus?

6. Luokassa on 28 opiskelijaa. Opiskelijoista on tyttöjä 7.

a) Kuinka monta prosenttia on tyttöjä? b) Kuinka monta prosenttia on poikia?

7. Liikkeessä A kännykkä maksoi 128 €. Samanmerkkinen kännykkä maksoi liikkeessä B 134 €. Kuinka monta prosenttia liikkeen B hinta oli suurempi kuin liikkeen A hinta?

8. Asiakas saa kamerasta alennusta 345,10 €, joka on 35 % kameran hinnasta. Mikä on kameran alkuperäinen hinta?

VII POLYNOMIT

1. Peruskäsitteitä

Lauseke on merkitty laskutoimitus.

Polynomi on **summan muodossa** oleva lauseke, jossa nimittäjässä ei ole **muuttujaa**.
Muuttuja/muuttujakirjain on lausekkeessa esiintyvä kirjain.
Vakio on lausekkeessa esiintyvä luku.

Esimerkki 1.

$5x^2 - 3x + 4$ ja $8x^3 + 2x - 4$ ja $8x - 7$ ovat polynomeja.

$\frac{3}{x} - 7$ ei ole polynomi, koska nimittäjässä on kirjain.

Termi

Polynomin yhteenlaskettavia sanotaan **termeiksi.**

$-5x^3$ $-3x^2$ $+4x$ $+7$
yhteenlaskettavat eli termit

Esimerkki 2.

a) Polynomin $7x^3 - 2x + 4$ termit ovat $7x^3$, $-2x$ ja 4.

b) Termeistä $-3x^2$, $-11x$ ja 9 voidaan muodostaa polynomi $-3x^2 - 11x + 9$.

Kerroin ja kirjainosa

Termi muodostuu useimmiten kahdesta osasta: **kertoimesta** ja **kirjainosasta**.
Termi, jolta puuttuu kirjainosa, on **vakiotermi**.

Esimerkki 3. Olkoon polynomi $-3x^4 - x^3 + 4x^2 + 5$.

termi	kerroin	kirjainosa
$-3x^4$	-3	x^4
$-x^3$	-1	x^3
$4x^2$	4	x^2
5	5	ei ole

Esimerkissä termi 5 on vakiotermi.

Nimityksiä

Termien lukumäärän mukaan polynomille on annettu seuraavat nimet:

		esimerkki
monomi	yksi termi	$-4x$
binomi	kaksi termiä	$3x - 4$
trinomi	kolme termiä	$-2x^4 + x^3 + 4x^2$

Jos polynomissa on enemmän kuin kolme termiä, käytetään nimeä polynomi.

Samanmuotoiset termit

Termit, joilla on **sama kirjainosa**, ovat **samanmuotoisia** termejä.

Esimerkki 4.

Polynomissa $5x - 3x^2 + 8x - 7 + x^2$ samanmuotoisia termejä keskenään ovat $5x$ ja $8x$ sekä $-3x^2$ ja x^2.

Polynomin asteluku

Jos polynomissa on yksi muuttujakirjain, polynomin asteluku on sama kuin suurin eksponentti.

Polynomin järjestäminen

Polynomi esitetään useimmiten termit järjestettynä.
Jos polynomissa on vain yhtä muuttujakirjainta, järjestetään termit alenevien potenssien mukaan.
Jos polynomissa on useampia muuttujakirjaimia, järjestetään termit aakkosjärjestykseen.

Esimerkki 5. Mikä on seuraavien polynomien asteluku? Järjestä polynomit.

polynomi	asteluku	polynomi järjestettynä
$x^3 + 4x^2 + 8 - 2x^4$	4	$-2x^4 + x^3 + 4x^2 + 8$
$2x^2 - x^3 + 9x - 2x^5$	5	$-2x^5 - x^3 + 2x^2 + 9x$
$-x + 9x^2 - 2$	2	$9x^2 - x - 2$

Esimerkki 6. Järjestä seuraavat polynomit.

polynomi	polynomi järjestettynä
$2b + 4a - 5$	$4a + 2b - 5$
$5a + 4c - 8 - 12b$	$5a - 12b + 4c - 8$

Polynomin nimeäminen kirjaimella (*nimetä = antaa nimi*)

Polynomit nimetään usein isolla kirjaimella. Yleisimmin käytettyjä kirjaimia ovat P, Q ja R. Kirjaimen jälkeen merkitään polynomissa käytetyt muuttujakirjaimet sulkumerkkien sisään pilkulla erotettuna.

Esimerkki 7.

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 12$
b) $Q(a,b) = 7a - 15b - 8$
c) $R(a,b,c) = 5a + 13b - 2c - 8$

Polynomin arvon laskeminen

Polynomin **arvo** saadaan siten, että sijoitetaan kirjaimen paikalle luku ja lasketaan näin saadun lausekkeen arvo.

Esimerkki 8. Laske polynomin 2ab – 3c arvo, kun a = –3, b = 7 ja c = –5.

$$2 \cdot (-3) \cdot 7 - 3 \cdot (-5) = -42 + 15 = -27$$

Polynomin arvo on –27.

Esimerkki 9. $P(x, y) = x^2 + 2xy - 5$. Laske $P(-1, 2)$.

$$P(-1, 2) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 = -8.$$

Harjoituksia

1. Mitkä lausekkeet ovat polynomeja?

a) $2x + 5$ b) $\frac{x}{5} - 4$ c) $\frac{6}{x} - 2$ d) $4x^3 + 2x - 7$

2. Mikä on polynomin $-x^3 + 4x^2 + 2x - 7$

a) kolmas termi b) ensimmäisen termin kerroin c) toisen termin kirjainosa

d) vakiotermi?

3. Nimeä polynomi termien lukumäärän mukaan.

a) $-6x$ b) $4x^3 + 2x - 7$ c) $2x + 5$ d) $-5a^3 + 8a^2 + 2a - 9$

4. Määritä polynomin asteluku.

a) $-5a + 8a^2 + 2a^5 - 9$ b) $7x + 5$ c) $-x + 4x^2 - 1$

5. Olkoon $P(x,y) = -x - 3y$. Laske seuraavat tehtävät.

a) $P(1, 4)$ b) $P(-2, -4)$

2. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Polynomien yhteenlasku

Poistetaan sulkumerkit ja yhdistetään samanmuotoiset termit.

Polynomien vähennyslasku

Polynomista voidaan vähentää toinen polynomi siten, että edelliseen lisätään jälkimmäisen **vastapolynomi**.

Vastapolynomi saadaan vaihtamalla jokaisen termin etumerkki.

Esimerkki 1.

polynomi	**vastapolynomi**
$8x^2 - 5x + 6$	$-8x^2 + 5x - 6$
$-7x^2 + 5x$	$7x^2 - 5x$

Esimerkki 2. Laske $(2x - 3) - (3x^2 + 2x - 1)$.

$$(2x - 3) - (3x^2 + 2x - 1)$$

$$= (2x - 3) + (-3x^2 - 2x + 1)$$

$$= 2x - 3 - 3x^2 - 2x + 1 = -3x^2 - 2$$

Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

1. Poistetaan sulkumerkit
2. Yhdistetään samanmuotoiset termit

Jos polynomin ympärillä olevien sulkumerkkien edessä on
- **plusmerkki** tai ei ollenkaan merkkiä, sulut voidaan poistaa ilman muuta
- **miinusmerkki**, sulkumerkkejä poistettaessa vaihdetaan jokaisen sulkumerkkien sisällä olevan termin etumerkki (eli lisätään vastapolynomi).

Esimerkki 3. Laske polynomien $3x - 5y - 2$ ja $3x - 4y - 2$ a) summa ja b) erotus.

a) $(3x - 5y - 2) + (3x - 4y - 2) = 3x - 5y - 2 + 3x - 4y - 2 = 6x - 9y - 4$

b) $(3x - 5y - 2) - (3x - 4y - 2) = 3x - 5y - 2 - 3x + 4y + 2 = -y$

3. Polynomien kertolasku

Monomien tulo

Kertoimet kerrotaan keskenään ja **samankantaiset potenssit** keskenään.

Esimerkki 1.

a) $3x^2y \cdot 5xy^3 = 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = 15x^3y^4$

b) $-5a \cdot (-6a^4b) = 30a^5b$

Polynomin kertominen monomilla

Jokainen polynomin termi kerrotaan erikseen monomilla.

Esimerkki 2. $-5x\,(3x^2 + 4x - 2) = -15x^3 - 20x^2 + 10x$

Polynomin kertominen polynomilla

Ensimmäisen polynomin jokaisella termillä kerrotaan toisen polynomin jokainen termi.

Esimerkki 3. Sievennä $(3a + 4)(5a^2 - 3a + 2)$.

$(3a + 4)(5a^2 - 3a + 2)$
$= 15a^3 - 9a^2 + 6a + 20a^2 - 12a + 8$
$= 15a^3 + 11a^2 - 6a + 8$ yhdistetään viimeksi samanmuotoiset termit

Harjoituksia

6. Kirjoita annetun polynomin vastapolynomi.

a) $6a - 5$ b) $-5a^2 - 7a + 9$

7. Merkitse ja laske polynomien $2a - 3$ ja $-a + 4$

a) summa b) erotus c) summan ja erotuksen erotus.

8. Sievennä $a^3 - [-a - (a^3 + a)]$.

9. Laske $R(-1,9)$, kun $R(x,y) = 3x^2 - (xy + y^2)$.

10. Sievennä.

a) $2x(3x - 7)$ b) $(a - b)(2a + 3b)$ c) $3a \cdot (-4a) - 8(a^2 + 4)$

VIII YHTÄLÖ, EPÄYHTÄLÖ JA VERRANTO

1. Yhtälö

Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, saadaan **yhtälö**.

Esimerkki 1.

$2 + 3 = 5$	**tosi** yhtälö
$5 - 3 = 8$	**epätosi** yhtälö
$x - 3 = 7$	Yhtälö on tosi, kun $x = 10$. Muilla muuttujan x arvoilla se on epätosi.
$x^2 + 1 = 5$	Yhtälö on tosi, kun $x = 2$ tai $x = -2$. Muilla muuttujan x arvoilla se on epätosi.

Määrittelyjoukko

Määrittelyjoukon muodostavat muuttujan kaikki mahdolliset arvot.
Yleensä määrittelyjoukko on reaalilukujoukko **R**.

Ratkaisujoukko

Kun **yhtälön ratkaisu** eli **juuri** sijoitetaan muuttujan paikalle, tulee yhtälöstä tosi.
Yhtälön ratkaisu **toteuttaa** yhtälön.
Ratkaisujen muodostama joukko on **ratkaisujoukko**.

Ehdollinen yhtälö

Ehdollinen yhtälö on tosi muuttujan x jollakin arvolla tai joillakin arvoilla.
Muilla muuttujan x arvoilla se on epätosi.

Esimerkki 2.

a) Yhtälö $x - 2 = 9$ on ehdollinen yhtälö. Se on tosi vain silloin, kun $x = 11$.
Luku 11 on yhtälön ratkaisu.

b) Yhtälö $x^2 = 16$ on ehdollinen yhtälö. Se on tosi, kun $x = 4$ tai kun $x = -4$.
Muilla muuttujan x arvoilla se on epätosi.

Ehdoton eli identtinen yhtälö

Ehdoton eli identtinen yhtälö on joko
- **aina tosi**

tai
- **aina epätosi**.

Esimerkki 3.

a) Yhtälö $x + 2 = x + 2$ on **tosi** kaikilla x:n arvoilla. Yhtälö on identtinen (identtisesti tosi).

b) Yhtälö $x + 1 = x$ on **epätosi** kaikilla x:n arvoilla. Yhtälö on identtinen (identtisesti epätosi).

Yhtälö, jossa muuttujan korkein eksponentti on yksi, on **ensimmäisen asteen yhtälö**.
Yhtälö, jossa muuttujan korkein eksponentti on kaksi, on **toisen asteen yhtälö**.
Yhtälö, jossa muuttujan korkein eksponentti on kolme, on **kolmannen asteen yhtälö** jne.

2. Yhtälön ratkaiseminen

1. Poistetaan sulkumerkit suorittamalla merkityt laskutoimitukset.
2. Siirretään muuttujatermit yhtälön vasemmalle puolelle ja muut termit oikealle puolelle (huomaa etumerkkien muutokset).
3. Yhdistetään samanmuotoiset termit.
4. Jaetaan yhtälön molemmat puolet muuttujan kertoimella ($\neq 0$) tai kerrotaan muuttujan jakajalla ($\neq 0$).
   Yhtälössä voi esiintyä nimittäjiä. Tällöin ne poistetaan yleensä kertomalla.

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $2(4 - 3x) - 5x = 11 - (2x - 9)$.

$2(4 - 3x) - 5x = 11 - (2x - 9)$	poistetaan sulut
$8 - 6x - 5x = 11 - 2x + 9$	siirretään termit
$-6x - 5x + 2x = 11 + 9 - 8$	yhdistetään samanmuotoiset termit
$-9x = 12 \quad \vert : (-9)$	jaetaan muuttujan kertoimella
$x = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$	supistetaan, muunnetaan sekaluvuksi

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{6} + \frac{3}{4} = 2 - \frac{x}{3}$.

$\frac{x}{6} + \frac{3}{4} = 2 - \frac{x}{3} \quad \vert \cdot 12$	kerrotaan yhtälö pienimmällä luvulla, johon nimittäjät sisältyvät

$$12 \cdot \frac{x}{6} + 12 \cdot \frac{3}{4} = 12 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{x}{3}$$

$$2x + 9 = 24 - 4x$$

$$2x + 4x = 24 - 9$$

$$6x = 15 \quad \vert : 6$$

$$x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Vakiokirjaimia

Yhtälössä voi olla myös muita kirjaimia kuin muuttuja eli **vakiokirjaimia**. Vakiokirjaimet voidaan rinnastaa lukuihin. Näitä vakiokirjaimia sanotaan **parametreiksi**. Tehtävässä ilmoitetaan, minkä muuttujan suhteen yhtälö ratkaistaan.

Esimerkki 3. Ratkaise yhtälö $5x - a = 3x - b$

a) muuttujan x suhteen **b)** muuttujan a suhteen.

a)
$$\begin{aligned} 5x - a &= 3x - 3b \\ 5x - 3x &= a - 3b \\ 2x &= a - 3b \\ x &= \frac{a - 3b}{2} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x - a &= 3x - 3b \\ -a &= 3x - 3b - 5x \\ -a &= -3b - 2x \\ a &= 3b + 2x \end{aligned}$$

Identtiset yhtälöt

Identtisessä yhtälössä **muuttujat häviävät kokonaan**. Jäljelle jää joko tosi lause tai epätosi lause.

Esimerkki 4.

a) Ratkaise yhtälö $7x + 5 = 7x + 3$.

$$\begin{aligned} 7x + 5 &= 7x + 3 \\ 7x - 7x &= 3 - 5 \\ 0 &= -2 \end{aligned}$$
identtisesti epätosi

Vastaus : Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

b) Ratkaise yhtälö $4x + 1 = 4x - 7 + 2 \cdot 4$.

$$\begin{aligned} 4x + 1 &= 4x - 7 + 8 \\ 4x - 4x &= -7 + 8 - 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$
identtisesti tosi

Vastaus: Yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Jos yhtälöä ratkaistaessa muuttuja häviää kokonaan ja jäljelle jää tosi lause, yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla.
Jos yhtälöä ratkaistaessa muuttuja häviää kokonaan ja jäljelle jää epätosi lause, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Harjoituksia

1. Ilmoita yhtälön asteluku.

a) $1 - x^3 = 0$ b) $2x + 6 = 9$ c) $3x^2 + 1 = 8x$

2. Ratkaise yhtälöt.

a) $15 - 3(3x + 2) + 7x = 4x - 2(5x + 7) - 1$

b) Ratkaise x:n suhteen $a + 4x = 5a - b + 3x$.

c) $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} - \frac{x}{4} = 1$

3. Ratkaise yhtälöt.

a) $2(x - 7) = 2x - 3$

b) $2(x - 5) + 5 \cdot 2 = 2x$

c) $5(x - 3) = 4x - 15$

4. Millä vakion a arvolla yhtälöllä $4x + 6a = 4(x + 3)$

a) on ratkaisuna kaikki luvut b) ei ole yhtään ratkaisua?

3. Toisen asteen yhtälöt

		esimerkki
täydellinen toisen asteen yhtälö	$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 3x - 2 = 0$
vaillinainen toisen asteen yhtälö	$ax^2 + bx = 0$	$3x^2 - 6x = 0$
vaillinainen toisen asteen yhtälö	$ax^2 + c = 0$	$5x^2 - 20 = 0$

Edellä olevissa yhtälöissä a, b ja c ovat vakiokirjaimia eli **parametreja**.

Muoto $ax^2 + c = 0$

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälöt.

a) $5x^2 - 20 = 0$ **b)** $x^2 - 5 = 0$ **c)** $x^2 + 5 = 0$

a)
$$\begin{aligned} 5x^2 - 20 &= 0 \\ 5x^2 &= 20 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$ tai $x = -2$

b) $x^2 - 5 = 0$
$x^2 = 5$
$x = \pm\sqrt{5}$

Vastaus: $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$ Vastataan **tarkka arvo**, ei likiarvoa.

c) $x^2 + 5 = 0$ Minkään luvun neliö ei ole negatiivinen.
$x^2 = -5$ Negatiivisesta luvusta ei voi ottaa neliöjuurta.

Vastaus: Ei ratkaisua.

Muoto $ax^2 + bx = 0$

Merkitään yhtälö tulon muotoon. (***jaetaan*** *yhtälö* ***tekijöihin***)

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 - 5x = 0$ **b)** $3x^2 - 6x = 0$ **c)** $2x^2 = -5x$

a) $x^2 - 5x = 0$ **Tulon nollasääntö:**
$x(x - 5) = 0$ Tulo on nolla, jos jokin sen tekijöistä on nolla.

$x = 0$ tai $x - 5 = 0$
$x = 0$ tai $x = 5$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 5$

b) $3x^2 - 6x = 0$
$3x(x - 2) = 0$

$3x = 0$ tai $x - 2 = 0$
$x = 0$ tai $x = 2$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 2$

c) $2x^2 = -5x$
$2x^2 + 5x = 0$
$x(2x + 5) = 0$

$x = 0$ tai $2x + 5 = 0$

$x = 0$ tai $x = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = -2\frac{1}{2}$

Esimerkki 3. Ratkaise yhtälö $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Täydellisen toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ **ratkaisukaava** on $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{ja} \qquad x_2 = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

Vastaus: $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -2$

4. Epäyhtälö

Epäyhtälö

Epäyhtälö saadaan, kun kaksi lauseketta merkitään **erisuuriksi**.

Erisuuruusmerkit

merkki	**luetaan**	**esimerkki**
$>$	on suurempi kuin	$8 > 6$
$<$	on pienempi kuin	$5 < 6$
$\geq$	on suurempi tai yhtä suuri kuin	$3 \geq 1$
$\leq$	on pienempi tai yhtä suuri kuin	$7 \leq 9$

Esimerkkejä ratkaistavista ensimmäisen asteen epäyhtälöistä:

Esimerkki 1.

a) $3x - 1 > 5$ luetaan: kolme x miinus yksi **on suurempi kuin** viisi

$$\begin{aligned} 3x - 1 &> 5 \\ 3x &> 5 + 1 \\ 3x &> 6 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

b) $2x + 7 \leq 3$ luetaan: kaksi x plus 7 **on pienempi tai yhtä suuri kuin** kolme

$$\begin{aligned} 2x + 7 &\leq 3 \\ 2x &\leq 3 - 7 \\ 2x &\leq -4 \\ x &\leq -2 \end{aligned}$$

Erisuuruusmerkin suunta on muutettava, kun epäyhtälön molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla.

Esimerkki 2. $-7x + 11 > -4 - 2x$

$$\begin{aligned} -7x + 11 &> -4 - 2x \\ -7x + 2x &> -4 - 11 \\ -5x &> -15 \qquad |: (-5) \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Harjoituksia

5. Mitkä seuraavista ovat epäyhtälöitä?

a) $x + 3 = 6$ b) $4x < -3$ c) $12 > x - 5$

6. Ratkaise epäyhtälöt.

a) $5x - 7 > 2x - 5$ b) $4 - 2x < 8 + 3x$ c) $3(-3x + 6) \geq -11x + 20$

7. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 - 81 = 0$ b) $3x^2 - 5 = 22$ c) $x^2 - \frac{9}{25} = 0$

d) $x^2 - 9 = -2$ e) $x^2 + 28 = -3$

8. Ratkaise.

a) $2x^2 - 8x = 4x$ b) $4x^2 + 8 = 5x + 4 \cdot 2$

9. Ratkaise päättelemällä.

a) $x^2 > 9$ b) $\sqrt{x - 2} > 0$ c) $\sqrt{2 - x} > 0$

5. Verranto

Suhde

Esimerkki 1. Sadan metrin juoksijan nopeus on noin 10 m/s. Etana etenee noin 0,01 m/s. Mikä on nopeuksien suhde?

10 m/s : 0,01 m/s = 1000 : 1

Vastaus: Suhde on 1000 : 1.

Kahden suureen tai luvun suhde saadaan, kun edellinen suure jaetaan jälkimmäisellä. Suureitten yksiköiden on oltava samat.

Suhde on **paljas** luku. Paljaassa luvussa **ei** ole yksikköä.

Esimerkki 2. Esitä mahdollisimman pienten kokonaislukujen suhteena.

a) 30 : 45 **b)** 6 m : 120 cm

a) $30 : 45 = \frac{30^{(15}}{45} = \frac{2}{3}$

Vastaus: Suhde on 2 : 3.

b) $6\text{ m} : 120\text{ cm} = \frac{6\text{ m}}{120\text{ cm}} = \frac{600\text{ cm}^{(120}}{120\text{ cm}} = \frac{5}{1}$

Vastaus: Suhde on 5 : 1.

Verranto

Verranto saadaan, kun **kaksi suhdetta merkitään yhtä suuriksi**.

$a : b = c : d$ tai $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1. jäsen
2. jäsen
3. jäsen
4. jäsen

Edellä olevassa verrantoyhtälössä a ja d ovat verrannon **äärimmäiset** jäsenet ja b ja c ovat verrannon **keskimmäiset** jäsenet.

Jos verranto on tosi, verrannon äärimmäisten jäsenten tulo on yhtä suuri kuin keskimmäisten jäsenten tulo.

Esimerkki 3. Ratkaise x.

$\frac{x}{7} = \frac{3}{14}$ | kerrotaan ristiin (*kertoa ristiin*)

$14x = 3 \cdot 7$

$14x = 21$ | :14

$x = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Harjoituksia

10. Ratkaise x.

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{20}$ b) $\frac{2}{7x} = \frac{4}{14}$ $(x \neq 0)$ c) $\frac{3x}{5} = \frac{x}{7}$

11. a) $\frac{x+3}{4} = \frac{2}{6}$ b) $\frac{2x-3}{5} = \frac{6}{4}$ c) $\frac{7x-11}{3} = \frac{4x+1}{2}$

SANASTOA

Alla olevaan sanastoon on otettu jokaisesta luvusta sanoja ja sanontatapoja.
Voit kerrata ja testata sen avulla käsitteitä ja yksittäisiä sanoja.

I LUKUJA JA LUKUJOUKKOJA

1. Perussanastoa

laskutoimitus
yhteenlasku
vähennyslasku
kertolasku
jakolasku
laskea yhteen
lisätä
vähentää
kertoa
jakaa
summa
erotus
tulo
osamäärä
plusmerkki
miinusmerkki
kertomerkki
jakomerkki
jakoviiva
laskea
merkitä
yhtäsuuruusmerkki
yhteenlaskettava
vähenevä
vähentäjä
tulon tekijä
kertoja
kerrottava
jaettava
jakaja
sulkumerkki
kaarisulut
hakasulut
aaltosulut
laskujärjestys

2. Kymmenjärjestelmä

lukuyksikkö
kymmenen
sata
tuhat
kymmenentuhatta
satatuhatta
desimaaliluku
desimaaliosa
kokonaisosa
desimaalipilkku
potenssi
miljoona
miljardi
biljoona
triljoona

3. Erilaisia lukuja

kokonaisluku
desimaalipilkku
desimaalipiste
päättymätön desimaaliluku
pyöristää
likiarvo
jakso
jaksollinen
jaksoton
tarkkuus
murtoluku
osoittaja
nimittäjä
muuntaa
sekaluku
kokonaisosa
murto-osa
jakojäännös
samanniminen
eriniminen
laventaa
laventaja
supistaa
supistaja

4. Lukujoukkoja

luonnollinen luku
kokonaisluku
rationaaliluku
irrationaaliluku
reaaliluku
etumerkki
positiivinen
negatiivinen
samanmerkkiset luvut
erimerkkiset luvut
on suurempi kuin
on pienempi kuin
on suurempi tai yhtä suuri kuin
on pienempi tai yhtä suuri kuin
on erisuuri kuin
vastaluku
käänteisluku
itseisarvo

II YKSIKÖITÄ

tera
giga
mega
kilo
hehto
deka
desi
sentti
milli
mikro
nano
piko
pituus
metri
massa
gramma
tonni
paino
vetomitat
litra
suhdeluku
aika
vuosi
kuukausi
vuorokausi

tunti
minuutti
sekunti

III LAUSEKE JA LAUSE

lauseke
lause
muuttuja
vakio
sijoittaa
lausekkeen arvo
tosi
epätosi

IV POTENSSIT

potenssi
potenssimerkintä
kantaluku
eksponentti
korottaa potenssiin
neliö
kuutio
samankantaisten potenssien tulo
samankantaisten potenssien osamäärä
tulon potenssi
osamäärän potenssi
potenssin potenssi
samankantaiset potenssit
samankorkuiset potenssit
sieventää

V NELIÖJUURI

neliöjuuri
juurimerkki
juurrettava
juuri
juuren arvo
juurilauseke
kuutiojuuri

VI PROSENTTILASKU

prosentti
prosenttimerkki
prosenttiluku
perusarvo
prosenttiarvo
prosenttikerroin
korotus
korottaa
nostaa
palkankorotus
korotettu hinta
alennus
alennusprosentti
alennettu hinta
pitoisuus
muutosprosentti
vertailuprosentti
alkuperäinen arvo
vertailuarvo
prosenttiyksikkö
promille

VII POLYNOMIT

polynomi
muuttuja
muuttujakirjain
vakio
termi
kerroin
kirjainosa
vakiotermi
monomi
binomi
trinomi
polynomin arvo
samanmuotoiset termit
polynomin asteluku
alenevat potenssit
vastapolynomi
sieventää

VIII YHTÄLÖ, EPÄYHTÄLÖ JA VERRANTO

yhtälö
määrittelyjoukko
ratkaisujoukko
yhtälön ratkaisu
ratkaista yhtälö
juuri
toteuttaa
ehdollinen yhtälö
ehdoton yhtälö
identtinen yhtälö
identtisesti tosi
identtisesti epätosi
ensimmäisen asteen yhtälö
toisen asteen yhtälö
vakiokirjain
parametri
identtinen yhtälö
täydellinen toisen asteen yhtälö
vaillinainen toisen asteen yhtälö
tarkka arvo
likiarvo
merkitä tulon muotoon
jakaa tekijöihin
tekijöihin jako
tulon nollasääntö
ratkaisukaava
epäyhtälö
päätellä
verranto
lukujen suhde
paljas luku
verrannon äärimmäiset jäsenet
verrannon keskimmäiset jäsenet
kertoa ristiin

VASTAUKSIA

1 LUKUJA JA LUKUJOUKKOJA

1. a) $8 \cdot 3 + 9 = 33$ b) $25 - 36 : 9 = 21$ c) $(9 + 11) \cdot 2 = 40$ d) $(9 + 7) : (9 - 7) = 8$

2. a) $20 : 5 + 20 \cdot 5 = 104$ b) $(25 - 5) \cdot (25 + 5) = 600$

   c) $(9 + 5) - (9 - 5) = 10$ d) $(22 + 8) \cdot (14 : 7) = 60$

3. a) 40 408 b) 1 312 600 c) 78,0204

4. a) satojatuhansia b) tuhannesosia c) kymmeniä d) ykkösiä

5. a) 17 000 b) 17 357,1 c) 17 357,076 d) 17 360

6. a) kahdeksan yhdeksäsosaa b) kolme kokonaista neljä viidesosaa
   c) seitsemän kokonaista kaksikymmentäyksi viideskymmeneskuudesosaa

7. a) $1\frac{2}{9}$ b) 11 c) $11\frac{1}{11}$

8. a) $\frac{18}{5}$ b) $\frac{37}{100}$ c) $\frac{20671}{10000}$

9. a) 0,6 b) 1,22… c) 5,25

10. $\frac{6}{30}, \frac{4}{30}, \frac{7}{30}$

11. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{22}$

12. a) Kaksi on pienempi kuin neljä.
    b) Viisi on erisuuri kuin seitsemän.
    c) Kaksitoista on suurempi tai yhtä suuri kuin miinus viisikymmentä.
    d) Viisi on suurempi kuin kolme pilkku viisi.

13. a) $-(-12) = 12$ b) $-(+12{,}5) = -12{,}5$

14. $-[-(-15)] = -15$

15. a) $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ b) $\frac{9}{11}$ c) $-\frac{1}{12}$

16. a) $|-25{,}1| = 25{,}1$ b) $|+11| = 11$

17. $|-18 + (+12)| - [-18 - (+12)] = 36$

18. $-\left(-\frac{5}{2}\right) - |-2| = \frac{1}{2}$

19. a) –3 b) –2,07 c) –4,1

20. a) $-1\frac{2}{3}$ b) $-3\frac{3}{4}$ c) $-4\frac{1}{12}$

21. $[(-21) + (+13)] - (-18) = 10$

22. $[(-15) - (-12)] - (-1) \cdot (-4) = -7$

23. $\frac{2}{5} : \left(-\frac{6}{10}\right) + (-5) = -5\frac{2}{3}$

II YKSIKÖITÄ

1. a) 3500 m b) 1214 cm c) 530 mm

2. a) 0,27 dm b) 1,48 m c) 1,245 km

3. a) 1490 dag b) 1,045 kg c) 45 mg

4. a) 0,149 hl b) 1,045 l c) 4,5 dl

5. a) 188 s b) 2,5 h c) 2 h

6. a) 4,86 € b) 2,5 kg

7. 53 min

8. 2 km

III LAUSEKE JA LAUSE

1. $(-0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5)(-0{,}2 - 3 \cdot 0{,}5) = -1{,}36$

2. lauseita $2x - 11 = 14$ ja $3 = 4$
   lausekkeita $2x - 11$ ja $a + 5b$

IV POTENSSIOPPIA

1. a) 5^4 b) a^3 c) 3^7 d) $(-3)^2$

2. a) 0,008 b) 225 c) 1 000 000 d) 9 e) –27 f) –9

3. a) $(-5)^2 = 25$ b) $(-5)^3 = -125$

4. a) $-48x^5$ b) $\frac{x^2y^3}{3}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

c) $-48a^{13}$ d) $2x^4y$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

5. a) 49 b) 25 c) 512 d) $14\frac{1}{2}$

V NELIÖJUURI

1. a) Neliöjuuri kuusitoista on neljä.
   b) Neliöjuuri kaksisataakaksikymmentäviisi on viisitoista.
   c) Kuutiojuuri satakaksikymmentäviisi on viisi.
   d) Neljäs juuri kahdeksankymmentäyksi on kolme.

2. a) $5a^5b^2$ b) 6 c) $\frac{3}{5}$ d) 22

VI PROSENTTILASKU

1. a) 16 € b) 64 €

2. a) 84 € b) 126 €

3. Korotus on 0,12 €, ja korotettu hinta on 1,32 €.

4. a) 1 snt b) 6 snt

5. 25 %

6. a) 25 % b) 75 %

7. 4,7 %

8. 986 €

VII POLYNOMIT

1. a) b) ja d)

2. a) 2x b) –1 c) x^2 d) –7

3. a) monomi b) trinomi c) binomi d) polynomi

4. a) 5 b) 1 c) 2

5. a) –13 b) 14

6. a) $-6a + 5$ b) $5a^2 + 7a - 9$

7. a) $(2a - 3) + (-a + 4) = a + 1$ b) $(2a - 3) - (-a + 4) = 3a - 7$

c) $[(2a - 3) + (-a + 4)] - [(2a - 3) - (-a + 4)] = -2a + 8$

8. $2a^3 + 2a$

9. -69

10. a) $6x^2 - 14x$ b) $2a^2 + ab - 3b^2$ c) $-20a^2 - 32$

VII YHTÄLÖ, EPÄYHTÄLÖ, VERRANTO

1. a) 3 b) 1 c) 2

2. a) $x = -6$ b) $x = 4a - b$ c) $1\frac{5}{7}$

3. a) ei ratkaisua b) kaikki reaaliluvut c) $x = 0$

4. a) $a = 2$ b) $a \neq 2$

5. b) ja c)

6. a) $x > \frac{2}{3}$ b) $x > -\frac{4}{5}$ c) $x \geq 1$

7. a) $x = \pm 9$ b) $x = \pm 3$ c) $x = \pm\frac{3}{5}$

d) $x = \pm\sqrt{7}$ e) ei ratkaisua

8. a) $x = 0$ tai $x = 6$ b) $x = 0$ tai $x = 1\frac{1}{4}$

9. a) $x > 3$ tai $x < -3$ b) $x > 2$ c) $x < 2$

10. a) $x = 12$ b) $x = 1$ c) $x = 0$

11. a) $x = -1\frac{2}{3}$ b) $x = 5\frac{1}{4}$ c) $x = 12\frac{1}{2}$

TURUN
KRISTILLISEN OPISTON
OPPIMATERIAALEJA